Über die Formel von G. G. Stokes

zur Berechnung regionaler Abweichungen

des

Geoids vom Normalsphäroid.

Ein Beitrag

zu den neueren Untersuchungen über die Gestalt der Erdoberfläche.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

eingereicht bei der

philosophischen Facultät der Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

von

WILLY HERGESELL.

STRASSBURG i. E.
Druck von M. DuMont-Schauberg.
1891.

Über die Formel von G. G. Stokes

zur Berechnung regionaler Abweichungen

des

Geoids vom Normalsphäroid.

Ein Beitrag

zu den neueren Untersuchungen über die Gestalt der Erdoberfläche.

INAUGURAL-DISSERTATION

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

zur

Erlangung der Doctorwürde

eingereicht bei der

philosophischen Facultät der Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

von

WILLY HERGESELL.

STRASSBURG i. E.
Druck von M. DuMont-Schauberg.
1891.

Von der Facultät genehmigt am 18. Februar 1891.

§ 1.

Die Aufgabe der höheren Geodäsie ist nach Bruns[1]) die Ermittelung der Kräftefunction W der Erde, oder was dasselbe ist, die Bestimmung der Niveauflächen, d. h. aller derjenigen Flächen, deren jede durch die Gleichung $W = \text{constans}$ bestimmt oder auch dadurch definiert ist, dass sie in jedem ihrer Punkte senkrecht zu der daselbst vorhandenen Richtung der Schwerkraft steht. Die Niveauflächen der Erde in der Nähe ihrer physischen Oberfläche sind geschlossene, stetig gebogene Flächen einfachen Zusammenhanges, ohne Kanten und Spitzen, welche die Erde vollständig umschliessen. Flächen kleineren Wertes der Kräftefunction umgeben solche grösseren Wertes schalenartig; sie weichen sehr wenig, hauptsächlich durch eine geringe Abplattung von der Kugelform ab[2]). Falls man von der Bewegung des Meeres durch Ebbe und Flut, den Meeresströmungen und der durch Winde und andere Ursachen erzeugten Wellenbewegung absieht, so muss die Oberfläche dieses nunmehr ruhenden und allein der Schwerkraft unterworfenen Meeres eine jener Niveauflächen sein. Man nennt sie die mathematische Erdoberfläche oder nach Listing das Geoid, im Gegensatze zur reellen, der physischen Erdoberfläche.

Das Geoid weicht, wie alle Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche, nur wenig in seiner Form von einer Kugel ab. Noch geringer sind die Abweichungen desselben von einem Rotationsellipsoide, dessen kleine Achse mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt. Dieselben bestehen hauptsächlich in geringen, stetigen Ein- und Ausbiegungen des Geoids gegen das Ellipsoid. Deshalb ist die Geoidfläche, wie zuerst Bruns gezeigt hat[3]), nicht durch einen einzigen analytischen Ausdruck darstellbar, da jene kleinen Erhebungen und Senkungen ebenso vielen, analytisch verschiedenen Flächen angehören. Sieht man jedoch von diesen Ein- und Ausbiegungen des Geoids ab, so erhält man eine dem Geoid sich möglichst nahe anschliessende, aber von Verbiegungen freie Oberfläche, das sogenannte Niveau- oder Normalsphäroid. Die Dimensionen und die Gestalt desselben sind auf Grund der vorhandenen Beobachtungen (astronomische Angaben, Gradmessungen, Schwere- resp. Pendelbeobachtungen) mit hinreichender Genauigkeit bestimmt worden. Das Normalsphäroid ist eine Rotationsfläche, und zwar eine algebraische Fläche 14. Ordnung[4]), deren Abweichungen von einem Rotationsellipsoide so gering sind, dass seine Form gradezu als Rotationsellipsoid bezeichnet werden kann[5]).

---

[1]) Bruns. Die Figur der Erde. S. 7.
[2]) Bruns. a. a. O. § 2. Ferner Helmert, Theorien der höheren Geodäsie. II. cap. 2.
[3]) Bruns. a. a. O. § 2.
[4]) Bruns. a. a. O. § 3. S. 16.
[5]) Helmert. a. a. O. II. cap. 2. § 17.

Die weitere Aufgabe der höheren Geodäsie besteht demnach jetzt darin, die Gestalt der Geoidfläche in ihren einzelnen Teilen zu bestimmen, zumal da die hierfür notwendigen Beobachtungen auch dazu beitragen, die Kenntnis der allgemeinen Erdgestalt zu verbessern.

Theoretisch sind Aufgaben dieser Art bereits auf verschiedene Weise gelöst worden, unter anderen von Christoffel in seiner Abhandlung: „Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch locale Messungen auf derselben“ (Crelle, Bd. 64). Ferner gibt Bruns in seiner bereits mehrfach erwähnten Abhandlung „Die Figur der Erde“ eine von allen Hypothesen über das Bildungsgesetz des Geoids unabhängige Lösung. Die praktische Anwendung beider Methoden ist jedoch mit vielen Schwierigkeiten verbunden und vorläufig noch nicht möglich.

Deshalb hat man versucht, in anderer Weise zum Ziele zu gelangen, indem man die Thatsache benutzt, dass das Geoid sehr nahe mit einem Rotationsellipsoide übereinstimmt, dessen Dimensionen mit hinreichender Genauigkeit bekannt sind.

Nimmt man an, dass das Geoid mit dem Normalsphäroide (auch Referenzellipsoid genannt) genau übereinstimmt und setzt bei letzterem eine gewisse ideelle Massenlagerung voraus, so kann man für jeden Punkt desselben die Schwerkraft, welche unter den beiden gemachten Voraussetzungen nach einem einfachen Gesetze sich ändert, der Grösse und Richtung nach berechnen. Wegen der Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid wird nun die in einem Punkte thatsächlich vorhandene Schwerkraft von der berechneten, welche man, als zum Normalsphäroid gehörig, die normale nennt, sowohl der Grösse als der Richtung nach verschieden sein. Demnach werden Abweichungen des Geoids sich durch Schwerestörungen und durch Lotabweichungen bemerkbar machen.

Die Erhebungen und Senkungen des Geoids sind entweder localer oder regionaler Natur. Local ist eine Abweichung, wenn sie in demselben Sinne, also als Hebung oder als Senkung, nur für ein kleines Flächenstück des Sphäroids eintritt, als eine Folge localer Massenunregelmässigkeiten, regional dagegen, wenn sich die Abweichung des Geoids im nämlichen Sinne über eine grössere Fläche erstreckt, während die Tiefe oder Höhe einer solchen regionalen Abweichung nicht grösser zu sein braucht, als bei einer localen.

Ebenso hat man bei den Schwerestörungen und Lotablenkungen locale und regionale zu unterscheiden. Zu regionalen Abweichungen des Geoids werden auch regionale Schwerestörungen und Lotabweichungen gehören, welche in diesem Falle für ein grösseres Gebiet in einem bestimmten Sinne stattfinden werden, ohne deshalb von besonderer Grösse sein zu müssen.

Was die bis jetzt beobachteten Lotabweichungen betrifft, so zeigen dieselben zunächst, dass die Geoidfläche zwar verhältnismässig schnelle Änderungen ihrer Krümmung erleidet, dass aber nirgends ein Krümmungswechsel stattfindet, und dass ein solcher auch an keiner Stelle zu erwarten ist. Die Erhebungen und Senkungen des Geoids sind daher nicht mit den Bergen und Thälern der physischen Erdoberfläche zu vergleichen; das Geoid besitzt vielmehr eine nach dem Erdinnern zu stets concave Krümmung; einer Senkung entspricht also nur eine geringere, einer Hebung eine stärkere Krümmung[6]).

Die Lotablenkungen kann man nun zur Construction der Abweichungen des Geoids vom Sphäroid benutzen, sowohl um die regionalen, als auch, wenn die Beobachtungen dicht genug

---

[6]) Helmert. a. a. O. I. Cap. 2. § 3.

sind, die localen Abweichungen kennen zu lernen. Diesen Weg hat Helmert in mustergiltiger Weise eingeschlagen. Die äusserst interessanten Resultate seiner Arbeit finden sich in den „Verhandlungen der Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung, 1888 und 1889." Daselbst ist der Verlauf des Geoids im Meridian des Brockens vom 51. bis 47. Breitengrade dargestellt. Die durchschnittlich sehr geringe Erhebung über das Sphäroid [7]) beträgt südlich vom Brocken 6 Meter, steigt dann in der Nähe der Alpen, um am Lanserkopf eine Höhe von nahezu 10 Metern zu erreichen.

Dies ist bis jetzt die einzige Stelle der Erdoberfläche, für welche das Geoid construiert worden ist. Über die Grösse der etwa noch vorhandenen Abweichungen sind bis jetzt nur Vermutungen ausgesprochen. Helmert lässt einen durchschnittlichen Maximalabstand von 200 Metern zu, andere selbst einen solchen von 1000 Metern.

Eine andere Methode endlich zur Bestimmung der Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid benutzt nicht die Lotablenkungen, sondern die Störungen in der Grösse der Schwerkraft. Ein von Einwürfen freies Verfahren hat in dieser Hinsicht allein G. G. Stokes schon im Jahre 1849 eingeschlagen und in seiner Abhandlung „On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth" eine Formel abgeleitet, welche gestattet, die regionalen (nicht die localen) Abweichungen des Geoids aus den Störungen der Schwerkraft zu berechnen. Da aber diese Formel zu ihrer Anwendung die Kenntnis der Schwerkraft auf der ganzen Erdoberfläche voraussetzt, so hat auch sie bis jetzt keine Anwendung finden können, und ebensowenig hat man sie behufs etwaiger Verwendung oder Umformung näher untersucht. Auch Helmert[8]) leitet sie ab und spricht die Hoffnung aus, dass sie in nicht allzu ferner Zeit für einzelne günstig gelegene Orte wird angewendet werden können.

Dies veranlasste mich, die Formel von Stokes darauf hin näher zu untersuchen. Die Resultate dieser Untersuchung sind folgende:

1) Eine wirkliche Berechnung der Abweichung des Geoids vom Sphäroid mit Hilfe der Formel von Stokes für irgend einen Punkt der Erdoberfläche ist bis jetzt und auch in absehbarer Zeit nicht möglich. Dagegen wird man sie an denjenigen Stellen, wo starke Abweichungen stattfinden, benutzen können, um zu entscheiden, ob eine Hebung oder Senkung des Geoids statt hat.

2) Sie bestätigt die Hypothese von Faye, nach welchem unter dem Meeresboden eine bedeutende Verdickung und Vergrösserung der Dichtigkeit der Erdkruste vorhanden ist.

3) Schliesslich kann sie dazu dienen, die Grenzen zu bestimmen, zwischen denen die Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid liegen.

§ 2.

Bezeichnet man mit γ_a die Schwerkraft am Äquator des Normalsphäroides, mit γ diejenige an einem Orte, dessen geographische Breite B ist, so lautet die Formel, nach welcher die Änderung der Normalschwerkraft erfolgt:

$$\gamma = \gamma_a \ (1 + \mathfrak{b} \sin^2 B), \qquad 1)$$

worin $\gamma_a = 9{,}7800\text{m}$ und $\mathfrak{b}$ eine Constante $= 0{,}005310$ ist[9]).

---

[7]) Als Referenzellipsoid legt Helmert das von Clarke 1880 berechnete zu Grunde.

[8]) Helmert. a. a. O. II. Cap. 3. § 40—42.

[9]) Helmert. a. a. O. II. Cap. 3. § 36.

Die an demselben Orte thatsächlich vorhandene Schwerkraft wollen wir mit g bezeichnen. Wegen der Abweichungen des Geoids von dem angenommenen Sphäroid wird g von γ verschieden sein. Setzt man

$$g - \gamma = \Delta g \qquad 2)$$

so gibt die Formel von Stokes an, wie sich die Abweichung des Geoids vom Sphäroid für einen bestimmten Punkt berechnen lässt, vorausgesetzt, dass Δg nicht nur für diesen Punkt, sondern für die ganze Erdoberfläche bekannt ist.

Zieht man von dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt M des Geoids und Sphäroids[10]) einen beliebigen Strahl, der das Geoid in A, das Sphäroid in B schneidet, so giebt die Differenz der beiden Radiivectoren

$$MA - MB = r - \varrho = N \qquad 3)$$

die Abweichung des Geoids vom Sphäroid für den Punkt A an.

Die Formel von Stokes lautet alsdann:

$$N = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \frac{\Delta g}{G} F(\psi)\, d\psi. \qquad 4)$$

Hierin ist F eine bekannte später genauer zu untersuchende Function der Veränderlichen ψ, R der mittlere Erdradius und G die mittlere Schwerkraft, welche beiden Grössen für Geoid und Sphäroid übereinstimmen. Zur Berechnung von R und G dienen die Formeln:

$$R = a\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right), \quad G = \gamma_a\left(1 + \frac{\beta}{3}\right), \qquad 5)$$

worin a den Äquatorradius und α die Abplattung bedeutet.

Da man über die Vorzeichen der Δg im Allgemeinen nichts aussagen kann, so sind auch die Vorzeichen der einzelnen Integralelemente

$$\frac{\Delta g}{G} F\, d\psi$$

durchaus unbekannt. Man kann daher in dem Integrale in Formel 4) nicht erkennen, welche seiner Teile positiv und welche negativ sind, und wie dieselben sich gegenseitig beeinflussen. Um dieses erkennen zu können, wollen wir statt Δg wieder $g - \gamma$ einführen, wodurch wir erhalten:

$$N = \frac{R}{G} \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} g F\, d\psi - \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \gamma F\, d\psi \right\}. \qquad 6)$$

In beiden Integralen stimmen jetzt die Vorzeichen der einzelnen Elemente mit denjenigen der Function F überein, da g und γ beide stets positiv sind. Bevor wir aber näher auf die Function F eingehen, wollen wir noch einmal die Formel von Stokes ableiten, jedoch mit der Abänderung, dass wir von vornherein die Differenzen Δg ausschliessen und statt dessen die Schwerkräfte g und γ selbst beibehalten. Dieses Verfahren gewährt noch den Vorteil, dass wir dadurch den Wert des Integrals

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \gamma . F . d\psi$$

in aller Strenge erhalten. Im Übrigen ist das eingeschlagene Verfahren ganz das Helmertsche,

---

10) Über den Beweis des Zusammenfallens des Schwerpunktes des Geoids und des Sphäroids mit dem Erdschwerpunkte, sehe man Helmert a. a. O. II. Cap. 3. § 43.

und ich verweise deshalb hiermit ein- für allemal auf Bd. II. Cap. 39—42 seines schon oft genannten Werkes.

Sowohl die wirkliche Schwerkraft g als auch der Radiusvector des Geoids lassen sich mit grosser Annäherung nach Kugelfunctionen folgendermassen entwickeln:

$$g = G\left\{1 - 2\,c\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots + k_n + \ldots\right\} \qquad 7)$$

$$r = R\left\{1 + \frac{1}{2}\,c\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) + k_2 + \frac{1}{2}\,k_3 + \frac{1}{3}\,k_4 + \ldots + \frac{1}{n-1}\,k_n + \ldots\right\}. \qquad 8)$$

In diesen Formeln bedeuten k_2, k_3, k_4 . . . . . Kugelfunctionen 2., 3., 4. Ranges u. s. w. Unter φ kann man, ohne die vorausgesetzte Genauigkeit zu beeinträchtigen, sowohl die geocentrische als auch die geographische Breite verstehen. Die Grösse c endlich ist das Verhältnis der Centrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator. Zwischen den Grössen a, b und c besteht die unter dem Namen des Clairautschen Theorems bekannte Beziehung:

$$a = \frac{5}{2}\,c - b\,. \qquad 9)$$

Für die Normalschwerkraft und den Radiusvector des Normalsphäroids gelten folgende Formeln:

$$\gamma = G\left\{1 - b\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right)\right\} \qquad 10)$$

$$\rho = R\left\{1 + a\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right)\right\}. \qquad 11)$$

Formel 10) folgt aus 1), indem $(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$ an Stelle von $\sin^2 B$ und $g_a\left(1 + \frac{b}{3}\right) = G$ gemäss 5) gesetzt wird.

Mit Hilfe des Clairautschen Theorems geht 11) über in:

$$\rho = R\left\{1 + \frac{5}{2}\,c\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) - b\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right)\right\}$$

oder indem man für $-b\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right)$ den Wert $\frac{\gamma - G}{G}$ einsetzt, wie er aus 10) sich ergiebt:

$$\rho = R\left\{1 + \frac{\gamma - G}{G} + \frac{5}{2}\,c\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right)\right\}. \qquad 12)$$

Wir vereinigen ferner in 7) die beiden Kugelfunctionen 2. Ranges zu einer einzigen, indem wir setzen:

$$-2\,c\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) + k_2 = k'_2.$$

Dadurch nehmen die Formeln 7) und 8) folgende Gestalt an:

$$g = G\left\{1 + k'_2 + k_3 + k_4 + \ldots + k_n + \ldots\right\} \qquad 13)$$

$$r = R\left\{1 + \frac{5}{2}\,c\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) + k'_2 + \frac{1}{2}\,k_3 + \frac{1}{3}\,k_4 + \ldots + \frac{1}{n-1}\,k_n + \ldots\right\}. \qquad 14)$$

Subtrahiert man 12) von 14), so erhält man:

$$r - \rho = N = R\left\{-\frac{\gamma - G}{G} + k'_2 + \frac{1}{2}\,k_3 + \frac{1}{3}\,k_4 + \ldots + \frac{1}{n-1}\,k_n + \ldots\right\}. \qquad 15)$$

Nun lässt sich, wie aus der Theorie der Kugelfunctionen bekannt ist, jede beliebige Function zweier Veränderlichen, welche wie Länge und Breite auf der Kugelfläche sich ändern, immer und zwar nur auf eine Weise nach Kugelfunctionen entwickeln. Diese Entwicklung kann stets auf die Form gebracht werden:

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n\, g\, d\sigma. \qquad 16)$$

Hierin bedeuten die P_n die elementaren Kugelfunctionen und die Integration ist über die ganze Kugeloberfläche vom Radius 1 zu erstrecken.

Wir nehmen denjenigen Punkt, auf welchen sich g und γ bezieht, und für welchen man N bestimmen will, als Pol an, wodurch dann ein Punkt der Kugeloberfläche durch seine Länge χ und seine Poldistanz ψ bestimmt und demnach

$$d\sigma = \sin\psi . d\psi . d\chi \qquad 17)$$

ist.

Die Entwicklungen 13) und 16) müssen identisch sein, so dass man erhält:

$$k_n = \frac{1}{G} \cdot \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n \, g \, d\sigma .$$

Mit Hilfe hiervon ergibt sich aus Formel 15):

$$N = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \int P_n \cdot \frac{g}{G} \, d\sigma - R \, \frac{\gamma - G}{G} . \qquad 18)$$

Substituiert man den Wert von $d\sigma$ aus Formel 17) und setzt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\psi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \cdot P_n = F \qquad 19)$$

so wird:

$$N = \frac{R}{G} \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} g . F . d\psi - 2\pi (\gamma - G) \right\} . \qquad 20)$$

Die Summierung der Reihe in Formel 19) liefert für F folgenden Wert:

$$F = \cos\frac{\psi}{2} - \frac{1}{2} \sin\psi \left\{ 6 . \sin\frac{\psi}{2} - 1 + \cos\psi \left(5 + 3 \log \text{nat} \left[\frac{1 - \cos\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2} \right] \right) \right\} . \qquad 21)$$

Formel 20) muss mit Formel 6) identisch sein, und daher folgt:

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \gamma \, F d\psi = 2\pi (\gamma - G) . \qquad 22)$$

Führt man für constanten sphärischen Abstand ψ statt der einzelnen g Mittelwerte g_ψ ein, so erhält man die einfachere Formel:

$$N = R \left\{ \int_0^{\pi} \frac{g_\psi}{G} \, F \, d\psi - \gamma \frac{G}{G} \right\} . \qquad 23)$$

§ 3.

Um einsehen zu können, welche Teile des Integrals

$$J = \int_0^{\pi} \frac{g_\psi}{G} . F . d\psi$$

den Wert von N am meisten beeinflussen, ist zunächst eine genaue Kenntnis der Function F notwendig. Denn da $\frac{g_\psi}{G}$ stets positiv ist, so hängen die Vorzeichen der einzelnen Elemente von J, $\frac{g_\psi}{G} . F . d\psi$, allein von F ab. Deshalb habe ich die Werte der Function F von 0° bis

180^0 in Abständen von je 5^0, zum Teil von je $2{,}5^0$, berechnet. Die Berechnung geschah mit 5stelligen Logarithmen, welche genügen, um F auf 4 Stellen genau zu erhalten. Die Resultate dieser Rechnung enthält folgende Tabelle:

Tabelle der Werte von F.

ψ	F	ψ	F	ψ	F	ψ	F
0^0	+1,0000	45^0	—0,3070	90^0	—0,9142	$147{,}5^0$	+0,5636
$2{,}5^0$	+1,1586	50^0	—0,5372	95^0	—0,7805	150^0	+0,5590
5^0	+1,2168	55^0	—0,7357	100^0	—0,6230	155^0	+0,5251
$7{,}5^0$	+1,2311	60^0	—0,8957	105^0	—0,4500	160^0	+0,4608
10^0	+1,2144	65^0	—1,0121	110^0	—0,2700	165^0	+0,3702
$12{,}5^0$	+1,1702	70^0	—1,0821	115^0	—0,0933	170^0	+0,2589
15^0	+1,1119	75^0	—1,1050	120^0	+0,0773	175^0	+0,1331
20^0	+0,9410	$77{,}5^0$	—1,0974	125^0	+0,2292	180^0	+0,0000
25^0	+0,7224	80^0	—1,0821	130^0	+0,3577		
30^0	+0,4736	$82{,}5^0$	—1,0546	135^0	+0,4578		
35^0	+0,2100	85^0	—1,0169	140^0	+0,5257		
40^0	—0,0543	$87{,}5^0$	—0,9699	145^0	+0,5596		

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass F ausser für $\psi = 180^0$ noch zweimal, in der Nähe von 40^0 und von 120^0, gleich Null wird. Da die Kenntnis dieser Nullpunkte für die Zerlegung des Integrals J in seine Teile von Wichtigkeit ist, so habe ich dieselben (mit 7stelligen Logarithmen) genau ermittelt. Dieselben finden statt für

$$\psi_1 = 38^0\ 57'\ 43{,}5''\quad \psi_2 = 117^0\ 39'\ 41{,}5''. \tag{1}$$

Dadurch zerfallen die Integrale

$$J = \int_0^{\pi} \frac{g_\psi}{G}.\,F.\,d\psi \tag{2}$$

$$C = \int_0^{\pi} F.\,d\psi \tag{3}$$

je in drei Teile, nämlich:

$$J_1 = \int_0^{\psi_1} \frac{g_\psi}{G}.\,F.\,d\psi,\quad J_2 = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{g_\psi}{G}.\,F.\,d\psi,\quad J_3 = \int_{\psi_2}^{\pi} \frac{g_\psi}{G}.\,F.\,d\psi, \tag{4}$$

$$C_1 = \int_0^{\psi_1} F.\,d\psi,\quad C_2 = \int_{\psi_1}^{\psi_2} F.\,d\psi,\quad C_3 = \int_{\psi_2}^{\pi} F.\,d\psi. \tag{5}$$

Die drei Integrale 5) lassen sich berechnen, da man die unbestimmten Integrale angeben kann.

Setzt man allgemein als Grenzen m und n ein, so ist nach 21) des § 2:

$$\int_m^n F.\,d\psi = \int_m^n \cos\frac{\psi}{2}\,d\psi - 3\int_m^n \sin\frac{\psi}{2}.\sin\psi\,d\psi + \frac{1}{2}\int_m^n \sin\psi\,d\psi - \frac{5}{2}\int_m^n \sin\psi\cos\psi\,d\psi$$
$$- \frac{3}{2}\int_m^n \sin\psi.\cos\psi.\log\text{nat}\left[\frac{1-\cos\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right].d\psi\ . \tag{6}$$

Für die einzelnen Teile ergeben sich folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_m^n \cos\frac{\psi}{2}\,d\psi = 2\left(\sin\frac{n}{2} - \sin\frac{m}{2}\right)\\
&3\int_m^n \sin\frac{\psi}{2}.\sin\psi\,d\psi = 4\left(\sin^3\frac{n}{2} - \sin^3\frac{m}{2}\right)\\
&\frac{1}{2}\int_m^n \sin\psi\,d\psi = -\frac{1}{2}(\cos n - \cos m)\\
&\frac{5}{2}\int_m^n \sin\psi.\cos\psi.\,d\psi = -\frac{5}{8}(\cos 2n - \cos 2m)\\
&\frac{3}{2}\int_m^n \sin\psi.\cos\psi.\log\text{nat}\left[\frac{1-\cos\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right]d\psi\\
&\quad - 6\left\{\left[\frac{\sin^2\frac{\psi}{2} - \sin^4\frac{\psi}{2}}{2}\cdot\log\text{nat}\left(\frac{1-\cos\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right)\right]_m^n - \left[\frac{1}{4}\sin^2\frac{\psi}{2} + \frac{1}{6}\sin^3\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4}\sin^4\frac{\psi}{2}\right]_m^n\right\}
\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Zu dem Wert des letzten dieser 5 Integrale gelangt man mit Anwendung der teilweisen Integration.

Setzt man $m = o$ und $n = \pi$, so erhält man, wie dies bereits Helmert[11]) gezeigt hat, den Wert des Integrals in Formel 3)

$$C = \int_o^\pi F\,d\psi = 0 \quad . \qquad 8)$$

In der Figur (s. am Ende), in welcher die ψ als Abscissen, die zugehörigen F als Ordinaten eingetragen sind, zeigt die ausgezogene Curve den Verlauf der Function F, wie er sich aus der mitgeteilten Tabelle ergiebt. Dieselbe lässt erkennen, dass das Integral oder die Fläche C aus drei einzelnen Teilen besteht, nämlich aus den positiven Teilen O A B D und G H K und dem negativen D E G. Diese drei Teile sind identisch mit den drei Teilen des Integrals C, nämlich:

$$OABD = C_1,\ DEG = -C_2,\ GHK = C_3.$$

Das Integral C ist also nichts anderes als die Differenz:

$$C_1 + C_3 - (-C_2)$$

und es ist deshalb gleich Null, weil der Minuend, d. h. die Summe der Flächen C_1 und C_3 gleich dem Subtrahend, d. h. gleich der Fläche $-C_2$ ist.

Setzt man in den Formeln 7) für m und n die Werte o, ψ_1, ψ_2 und π ein, so erhält man:

$$C_1 = +\,0{,}56126,\ C_2 = -\,0{,}95559,\ C_3 = +\,0{,}39433. \qquad 9)$$

Die Integrale J_1, J_2 und J_3 gehen aus den Integralen C_1, C_2 und C_3 dadurch hervor, dass die einzelnen Elemente der letzteren mit den zugehörigen $\frac{g\,\psi}{G}$ multipliciert werden. Die betreffenden Ordinaten $\frac{g\,\psi}{G}F$ werden, je nachdem $\frac{g\,\psi}{G} \gtrless 1$ ist, grösser oder kleiner als die zuge-

[11]) Helmert a. a. O. II. Cap. 3. § 42.

hörigen Ordinaten F sein. Die punktierte Curve $A^1B^1DE^1GH^1K$ möge den Verlauf der Function $\frac{g\psi}{G}F$ darstellen. Da $\frac{g\psi}{G}$ nie gleich Null ist, so besitzt die Function $\frac{g\psi}{G}F$ dieselben Nullpunkte, und auch keine anderen, wie die Function F selbst. Die punktierte Curve muss daher die Nullpunkte D, G und K mit der ausgezogenen gemeinsam haben, und da $\frac{g\psi}{G}$ stets sehr wenig von 1 sich unterscheidet, wird sie sich auch nie weit von dieser entfernen.

Die Integrale J_1, J_2 und J_3 sind identisch mit den Flächenstücken OA^1B^1D, DE^1G und GH^1K, welche von den beiden Achsen und der punktierten Curve begrenzt werden. Es wird jetzt in der Differenz:

$$J = J_1 + J_3 - (-J_2)$$

der Minuend im Allgemeinen nicht mehr gleich dem Subtrahend und daher auch das Integral J nicht mehr gleich Null sein. Wegen des geringen Unterschiedes des Factors $\frac{g\psi}{G}$ von der Einheit wird aber J nie sehr gross werden und im allgemeinen dieselbe Ordnung, wie

$$\int_0^{\pi} \frac{\gamma\psi}{G} F \, d\psi = \frac{\gamma - G}{G} \quad \text{besitzen.}$$

Wenn wir jetzt zusehen, welche Teile von J hauptsächlich in Betracht kommen, so bemerken wir, dass jede der drei Grössen J_1, J_2 und J_3 in gleicher Weise zu berücksichtigen ist. Eine ungenaue Berechnung von J_2 und J_3 ist genau so schädlich wie eine solche von J_1; jeder Fehler in J_1 oder J_2 oder J_3 tritt in gleicher Weise in J auf.

Denkt man sich um den Punkt A, für welchen N berechnet werden soll, mit den sphärischen Abständen ψ_1 und ψ_2 Kreise geschlagen, so zerfällt dadurch die Erdoberfläche in drei Zonen, Z_1, Z_2 und Z_3. Die einzelnen Werte von g in Z_1 bestimmen J_1, ebenso die einzelnen Werte von g in Z_2 und Z_3 die Werte von J_2 und J_3. Nur diejenigen Werte von g, welche auf den Trennungskreisen der drei Zonen oder in deren nächster Nähe liegen, kommen nicht in Betracht, da dort überall $F = 0$ oder wenig von Null verschieden ist. Punkte, die mehr als 5^0 von den beiden Trennungskreisen entfernt sind, dürfen schon nicht mehr vernachlässigt werden, da, wie die Curve und die Tabelle zeigen, grade dort F sehr schnell sich ändert und in 5^0 Abstand ungefähr bereits den Wert 0,3 besitzt. Ebenso ist die Kenntniss von g, was besonders wichtig ist, nicht notwendig im Gegenpunkte von A und in dessen nächster Umgebung. [12])

§. 4.

Es fragt sich jetzt, in welcher Weise die Integration im Integrale J unter Voraussetzung ausreichenden Beobachtungsmaterials am zweckmässigsten ausgeführt werden könnte.

Indem man J in seine drei Teile zerlegt, nimmt Formel 23) des § 2 folgende Gestalt an:

$$N = \frac{R}{G}\left\{\int_0^{\psi_1} g_\psi F d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} g_\psi F d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi} g_\psi F d\psi - (\gamma - G)\right\}. \qquad 1)$$

---

[12]) Helmert (a. a. O. II. Cap. 3. § 42) sagt: Ein Ort ist günstig, wenn Δg in seiner Umgebung bis $\psi = 30^0$ bestimmbar ist, und wenn in die Gebiete um $\psi = 60^0$ bis 100^0 und 140^0 bis 170^0 nicht zu viele Gegenden der Erdoberfläche fallen, welche nicht wenigstens eine Schätzung von Δg zulassen.

Wir führen für jedes der drei Integrale abermals Mittelwerte der g_ψ ein, welche wir mit g_1, g_2, g_3 bezeichnen wollen, und erhalten:

$$N = \frac{R}{G}\left\{ g_1 C_1 + g_2 C_2 + g_3 C_3 - (\gamma - G)\right\}, \qquad 2)$$

worin C_1, C_2 und C_3 die in 9) des vorigen Paragraphen angegebenen Werte besitzen.

Da die Beobachtungen meistens nur die Pendellängen geben, so wollen wir in obiger Formel statt der Schwerkräfte g und γ diese einführen.

Den früheren Bezeichnungen entsprechend, bezeichnen wir mit λ die normale, mit l die wirklich vorhandene, mit L die mittlere Pendellänge, letztere bestimmt durch die Formel

$$L = \lambda a \left\{ 1 + \frac{b}{3} \right\} = 0{,}992672\,\text{m}, \qquad 3)$$

worin $\lambda a = 0{,}990918\text{m}$ die Pendellänge am Äquator bedeutet.

Die Berechnung der normalen Pendellänge geschieht nach der Formel:

$$\lambda = \lambda a\ (1 + b\sin^2 B)\ . \qquad 4)$$

Statt der Grössen γ, G, g, g_ψ, g_1, g_2, g_3 können nun in allen Formeln für N ohne weiteres die entsprechenden Grössen λ, L, l, l_ψ, l_1, l_2, l_3, eingeführt werden, weil die Grössen γ und g in demselben Verhältnis zu G stehen, wie die entsprechenden Pendellängen λ und l zu L. Dadurch erhält man aus 2):

$$N = \frac{R}{L}\left\{ l_1 C_1 + l_2 C_2 + l_3 C_3 - (\lambda - L)\right\}. \qquad 5)$$

Die Mittelwerte l_1, l_2, l_3 wären etwa folgendermassen zu berechnen. Zunächst würde man für die einzelnen ψ die Mittelwerte l_ψ bilden. Dann hätte man jedes l_ψ mit dem zugehörigen Werte von F und $\Delta\psi$ zu multiplicieren, hierauf die Summe dieser Producte, also $\sum l_\psi\ F.\ \Delta\psi$, zu berechnen. Wenn nun auch $\sum l_\psi.\ F.\ \Delta\psi$ nur eine sehr rohe Annäherung an das Integral $\int l_\psi\ F.\ d\psi$ ist und die Benutzung dieser Werte für die Integrale in der Formel

$$N = \frac{R}{L}\left\{ \int_0^{\psi_1} l_\psi.\ F.\ d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} l_\psi.\ F.\ d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi} l_\psi\ F\ d\psi - (\lambda - L)\right\}$$

nur zu illusorischen Werten von N führen würde, so werden doch die Quotienten von der Form:

$$\frac{\sum l_\psi.\ F.\ \Delta\psi}{\sum F.\ \Delta\psi}$$

die Mittelwerte l_1, l_2, l_3 mit hinreichender Annäherung darstellen, um zur Berechnung von N in Formel 5) benutzt werden zu können.

Um die Genauigkeit dieses Verfahrens zu prüfen und um zu erkennen, in welchem Abstande die einzelnen l_ψ aufeinander zu folgen haben, braucht man nur in 5) l_1, l_2 und l_3 mit Benutzung der Normalpendellänge λ zu berechnen. Es muss sich alsdann, wenn das Verfahren genau genug ist,

$$\int_0^{\pi} l_\psi.\ F.\ d\psi = \int_0^{\pi} \lambda_\psi.\ F.\ d\psi = \lambda - L,$$

d. h. $N = 0$ ergeben.

Wir wollen die Rechnung für den Nordpol (resp. Südpol) durchführen. Die Kreise mit constantem ψ fallen dann mit den Breitekreisen zusammen, auf denen λ und γ constant sind, so dass also die Bildung der Mittelwerte λ_ψ wegfällt. Da ferner die sämtlichen Pendellängen nur wenig kleiner als 1^m sind, so ist es für die Durchführung der Rechnung vorteilhaft, die Pendellängen λ durch $1-\lambda'$ zu ersetzen, wobei also λ' die Ergänzung von λ zu 1 bedeutet. Berücksichtigt man noch, dass $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ ist, so nimmt Formel 5) dadurch folgende Gestalt an:

$$N = -\frac{R}{L}\left\{\lambda'_1 C_1 + \lambda'_2 C_2 + \lambda'_3 C_3 + (\lambda - L)\right\}. \qquad 6)$$

λ'_1, λ'_2 und λ'_3 sind hierin also nicht die Mittelwerte der Pendellängen, sondern ihre Ergänzungen zu 1.

Lässt man die einzelnen ψ zunächst im Abstande von je 10 Grad aufeinander folgen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 C_1 + \lambda'_2 C_2 + \lambda'_3 C_3 &= -0{,}003545 \\ \lambda_P - L &= +0{,}003508 \\ \hline \lambda'_1 C_1 + \lambda'_2 C_2 + \lambda'_3 C_3 + (\lambda_P - L) &= -0{,}000037, \end{aligned}$$

worin $\lambda_P = 0{,}996180$ die Normalpendellänge am Nordpol ist.

Diese Abweichung von Null ist noch sehr gross; denn aus derselben würde mit Hilfe von 6) eine Erhebung des Geoids von circa 240^m folgen, d. h. der gesuchte Wert von N würde sich durch das ungenaue Rechnungsverfahren um diese Zahl zu gross ergeben.

Im folgenden ist die Rechnung noch einmal durchgeführt, derart, dass die einzelnen ψ einen Abstand von je 5 Grad von einander haben.

Nachstehende Tabelle giebt eine Uebersicht über die Rechnung.

ψ	λ	$1-\lambda=\lambda'$	$\lambda'.F.$	
0°	0,996180	0,003820	+0,003820	Erste Zone.
5°	0,996140	0,003860	+0,004697	$\sum \lambda' F = +0{,}029200$; $\sum F = +6{,}8901$;
10°	0,996021	0,003979	+0,004832	$\lambda'_1 = \frac{\sum \lambda' F}{\sum F} = +0{,}004238$; $C_1 = +0{,}56126$;
15°	0,995827	0,004173	+0,004640	$\lambda'_1 . C_1 = +0{,}002379.$
20°	0,995564	0,004436	+0,004174	
25°	0,995240	0,004760	+0,003439	
30°	0,994864	0,005136	+0,002432	
35°	0,994449	0,005551	+0,001166	
40°	0,994006	0,005994	—0,000325	Zweite Zone.
45°	0,993549	0,006451	—0,001980	$\sum \lambda' F = -0{,}092173$; $\sum F = -10{,}9591$;
50°	0,993092	0,006908	—0,003711	$\lambda'_2 = \frac{\sum \lambda' F}{\sum F} = +0{,}008411$; $C_2 = -0{,}95559$;
55°	0,992649	0,007351	—0,005408	$\lambda'_2 C_2 = -0{,}008037.$
60°	0,992233	0,007767	—0,006957	
65°	0,991858	0,008142	—0,008240	
70°	0,991534	0,008466	—0,009161	
75°	0,991270	0,008730	—0,009647	
80°	0,991077	0,008923	—0,009656	
85°	0,990958	0,009042	—0,009195	
90°	0,990918	0,009082	—0,008303	
95°	0,990958	0,009042	—0,007057	
100°	0,991077	0,008923	—0,005559	
105°	0,991270	0,008730	—0,003928	
110°	0,991534	0,008466	—0,002286	
115°	0,991858	0,008142	—0,000760	

ψ	λ	$_1 - \lambda = \lambda'$	$\lambda'.F.$
120°	0,992233	0,007767	+0,000600
125°	0,992649	0,007351	+0,001685
130°	0,993092	0,006908	+0,002471
135°	0,993549	0,006451	+0,002953
140°	0,994006	0,005994	+0,003151
145°	0,994449	0,005551	+0,003106
150°	0,994864	0,005136	+0,002871
155°	0,995240	0,004760	+0,002499
160°	0,995564	0,004436	+0,002044
165°	0,995827	0,004173	+0,001545
170°	0,996021	0,003979	+0,001030
175°	0,996140	0,003860	+0,000514
180°	0,996180	0,003820	+0,000000

Dritte Zone.

$$\sum \lambda' F = +0{,}024469;\ \Sigma F = +4{,}5144;$$

$$\lambda'_3 = \frac{\sum \lambda' F}{\sum F} = +0{,}005420;\ C_3 = +0{,}39433;$$

$$\lambda'_3 . C_3 = +0{,}002137.$$

Es ergiebt sich:

$$\lambda'_1 C_1 + \lambda'_2 C_2 + \lambda'_3 C_3 = -0{,}003521$$
$$\lambda_P - L = +0{,}003508$$
$$\lambda'_1 C_1 + \lambda'_2 C_2 + \lambda'_3 C_3 + (\lambda_P - L) = -0{,}000013.$$

Dieser Abweichung von Null entspricht noch immer ein Fehler von etwa 80^m in N.

Die einzelnen Kreise mit constantem ψ hätten also in noch geringerem Abstande als je 5 Grad aufeinander zu folgen.

Da das vorliegende Beispiel sich auf den Nord- resp. Südpol der Erde bezieht, demnach kein Fehler bei der Bildung der l_ψ begangen werden konnte, so wird die im obigen Beispiel vorhandene Ungenauigkeit für jeden anderen Punkt der Erdoberfläche noch grösser sein, da für einen solchen schon die einzelnen l_ψ ungenau ausfallen werden. Die bis jetzt vorhandenen Beobachtungen, die wir im nächsten Paragraphen genauer besprechen werden, reichen noch nicht zur Bildung eines einzigen l_ψ aus, während die Anwendung der Formel 5) grade die fehlerlose Kenntnis sämtlicher l_ψ voraussetzt.

Nach diesen Bemerkungen wird es klar sein, dass man zu einer strengen Auswertung der Formel 5) höchstens erst dann wird schreiten können, wenn in der That Beobachtungen der Pendellängen von der ganzen Erdoberfläche vorliegen. Die einzelnen Beobachtungen müssten systematisch, ziemlich dicht bei einander, etwa in einem sphärischen Abstande von je 2 bis 3 Grad auf dem Festlande wie auf dem Meere, angestellt werden, derart, dass sie gestatten, erstens die einzelnen l_ψ hinreichend genau zu bilden, zweitens mit Hilfe derselben die Mittelwerte l_1, l_2 und l_3 zu berechnen.

Die hierzu notwendigen Beobachtungen liegen noch nicht vor und werden auch wohl in absehbarer Zeit nicht vorhanden sein.

§ 5.

In der Formel 2) des vorigen Paragraphen führen wir wieder die Abweichungen Δg der wirklichen Schwerkraft g von der Normalschwerkraft γ ein. Die Mittelwerte g_1, g_2, g_3 mögen sich von den entsprechenden Mittelwerten der Normalschwerkraft um Δg_1, Δg_2, Δg_3 unterscheiden, derart dass

$$g_1 = \gamma_1 + \Delta g_1,\quad g_2 = \gamma_2 + \Delta g_2,\quad g_3 = \gamma_3 + \Delta g_3 \qquad 1)$$

ist.

Führt man dieses in Formel 2) des § 4 ein und berücksichtigt, dass

$$C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2 + C_3 \gamma_3 = \int_0^{\pi} \gamma_\psi . F . d\psi = \gamma - G$$

ist, so erhält man:

$$N = \frac{R}{G} (C_1 . \Delta g_1 + C_2 . \Delta g_2 + C_3 . \Delta g_3), \qquad 2)$$

oder, indem wir statt der Schwerkraft die Pendellänge einführen, also unter Δl die Abweichung der wirklichen von der normalen Pendellänge verstehen:

$$N = \frac{R}{L} (C_1 . \Delta l_1 + C_2 . \Delta l_2 + C_3 . \Delta l_3). \qquad 3)$$

Durch Ausklammerung von C_1 geht diese Formel über in:

$$N = \frac{R\, C_1}{L} \left(\Delta l_1 + \frac{C_2}{C_1} . \Delta l_2 + \frac{C_3}{C_1} \Delta l_3 \right). \qquad 4)$$

Die mittlere Pendellänge L ergiebt sich aus derjenigen am Äquator $\lambda_a = 0{,}990918^m$ vermittelst der Formel 3) des § 4 zu

$$L = 0{,}992672^m .$$

Ebenso erhält man mit Benutzung der Formel 5) des § 2 und der Werte $a = 6377397^m$ (nach Bessel), $\alpha = 0{,}003416$ (nach Helmert) für den mittleren Erdradius den Wert:

$$R = 6370293^m .$$

Es ergeben sich ferner die abgerundeten, aber für unsere Zwecke hinreichend genauen Werte:

$$\frac{R . C_1}{L} = 3600000, \quad \frac{C_2}{C_1} = -1{,}7, \quad \frac{C_3}{C_1} = 0{,}7.$$

Die Abweichungen Δl werden gewöhnlich in Mikrons (1 Mikron $= \frac{1}{1000}$ Millimeter) gegeben. Setzen wir dies in 4) voraus, so muss man, um N in Metern zu erhalten,

$$\frac{R\, C_1}{L} = 3{,}6$$

setzen. Demnach ergiebt sich schliesslich folgende Formel:

$$N = 3{,}6 (\Delta l_1 - 1{,}7\, \Delta l_2 + 0{,}7\, \Delta l^3), \qquad 5)$$

welche also N in Metern liefert, wenn Δl_1, Δl_2 und Δl_3 in Mikrons ausgedrückt sind.

Um die Mittelwerte Δl_1, Δl_2, Δl_3 zu berechnen, muss man die Erdoberfläche in 3 Zonen Z_1, Z_2, Z_3 teilen, dadurch, dass man um den Punkt P, für welchen man N bestimmen will, mit den sphärischen Abständen ψ_1 und ψ_2 Kreise schlägt. Die Zone Z_1, deren Mittelpunkt P ist, hat den kleinsten Flächeninhalt; derselbe beträgt rund $\frac{1}{10}$, während $Z_2 = \frac{6{,}3}{10}$ und $Z_3 = \frac{2{,}7}{10}$ der Erdoberfläche betragen. Afrika, Nordamerika, Südamerika, Australien mit den Inselgebieten von Borneo, Neu-Guinea und Neu-Seeland sind nur wenig kleiner, Europa-Asien dagegen beträchtlich grösser als Z_1. Für keinen der genannten Continente, selbst nicht für Europa sind die Beobachtungen in solcher Dichtigkeit vorhanden, dass an eine Bestimmung von Δl_1 gedacht werden könnte; noch viel weniger ist eine Ermittelung von Δl_2 und Δl_3 möglich.

Trotzdem kann man mit einiger Wahrscheinlichkeit nachweisen, dass Δl_2 und Δl_3 nie von besonderer Grösse sein werden.

Da der Volumenschwerpunkt des Geoids mit dem Schwerpunkt der Erde nahezu zusammenfällt, so hat letzterer eine mittlere Lage zu der mathematischen Erdoberfläche. Deshalb können die Ein- und Ausbiegungen des Geoids gegen das Normalsphäroid nicht derartig verteilt sein, dass z. B. auf einer Hälfte der Geoidfläche nur Ein-, auf der anderen nur Ausbiegungen vorhanden sind. Vielmehr werden die Ein- und Ausbiegungen überall mit einander abwechseln. In Folge dessen ist die Annahme berechtigt, dass, wenn man die Erdoberfläche auf nicht zu kleinen Kreisen begeht, man sowohl auf Hebungen als auch auf Senkungen des Geoids treffen wird. Dem entsprechend werden also in diesem Falle auch die auf einem solchen Kreise vorhandenen Abweichungen Δg der wirklichen von der normalen Schwerkraft und ebenso die Abweichungen Δl der wirklichen von der normalen Pendellänge, teils positiv, teils negativ sein. Zum Belege dieser Behauptung führe ich folgende Beobachtungen an, welche ungefähr auf dem zwölften Grad nördlicher Breite angestellt sind:

Beobachtungsort.	Länge.	Δl in Mikrons.
Aden	43° E.	+ 36
Mangalore	73° E.	— 31
Bangalore	75° E.	+ 38
Madras	78° E.	— 33
Guam	142° E.	+ 58
Trinidad	64° W.	— 18

Die zu solchen Kreisen gehörigen Mittelwerte Δl_ψ setzen sich demnach aus positiven und negativen Elementen zusammen und ihre Zahlenwerte werden nicht von besonderer Grösse sein.

Dieses letztere trifft bei allen Δl_ψ der zweiten Zone zu. Die Mittelwerte Δl_1, Δl_2 und Δl_3 setzen sich nun wieder aus den einzelnen Δl_ψ zusammen. Die Δl_ψ, welche Δl_2 bestimmen, sind also jedenfalls nicht von besonderer Grösse, und ferner ist kein Grund zu der Annahme vorhanden, dass sie sämtlich dasselbe Vorzeichen besitzen werden; vielmehr werden auch sie zum Teil positiv, zum Teil negativ sein. Hieraus folgt, dass der Zahlenwert von Δl_2, für welchen Punkt man auch N bestimmen mag, erst recht nicht von besonderer Grösse sein kann.

Wir gehen nun zur Betrachtung von Δl_3 über. Die Zone Z_3, zu welcher Δl_3 gehört, kann man erhalten, indem man um den Gegenpunkt P′ von P mit einem sphärischen Radius von rund 62 Grad den Kreis schlägt. Wir wollen uns die Berechnung von Δl_3 in derselben Weise ausgeführt denken, wie dies in § 4 geschehen ist. Wir schlagen um P′ Kreise, die im Abstande von 5 zu 5 Grad auf einander folgen. Die zu den einzelnen Kreisen gehörigen

Δl_ψ wollen wir, bei dem äussersten Kreise beginnend, mit m_1, m_2, m_3 u. s. w. bezeichnen. Mit Benutzung abgerundeter Werte aus der Tabelle für F ergiebt sich dann folgender Ausdruck:

$$\Delta l_3 = \frac{0{,}1\,m_1 + 0{,}2\,m_2 + 0{,}4\,m_3 + 0{,}5\,m_4 + 0{,}5\,m_5 + 0{,}6\,m_6 + 0{,}6\,m_7 + 0{,}5\,m_8 + 0{,}5\,m_9 + 0{,}4\,m_{10} + 0{,}3\,m_{11} + 0{,}1\,m_{12} + 0{,}0\,m_{13}}{4{,}5}$$

Diejenigen Δl_ψ, die wegen einer in P′ etwa vorhandenen regionalen Abweichung von besonderer Grösse sein und dasselbe Vorzeichen besitzen können, sind hauptsächlich m_{13}, m_{12} und m_{11}. Aber gerade m_{13}, der Wert von Δl in P′, fällt wegen des Koeffizienten Null ganz weg und m_{12} und m_{11} können ebenfalls wegen ihrer kleinen Zahlenkoeffizienten nicht einen besonders grossen Zahlenwert von Δl_3 zur Folge haben. Die Grössen m_1, m_2 u. s. w. bis m_7 beziehen sich schon auf grössere Kreise, und es treffen daher für sie die vorhin gemachten Bemerkungen zu, dass sie, da sie sich aus positiven und negativen Elementen zusammensetzen, nicht besonders grosse Zahlenwerte besitzen können, wobei noch hinzukommt, dass ihre Zahlenkoeffizienten zum Teil recht klein sind. Wenn nun schliesslich auch m_8, m_9 und m_{10} von einiger Grösse sein sollten, so können sie allein doch nicht den Zahlenwert von Δl_3 besonders stark in die Höhe ziehen. Bedenkt man ausserdem, dass Δl_3 in der Formel 5) für N den Koeffizienten 0,7 besitzt, so wird man einsehen, dass auch Δl_3 den Wert von N nicht mehr beeinflussen wird, als Δl_2, welches mit dem Factor 1,7 versehen ist.

Was schliesslich Δl_1 anbelangt, so setzt sich dieses aus den einzelnen Δl der ersten Zone zusammen. Diese, besonders diejenigen, welche nicht zu weit von dem Mittelpunkt P derselben entfernt sind, können bei einer in P vorhandenen regionalen Abweichung von erheblicher Grösse sein, und werden, was besonders wichtig ist, alle das nämliche Vorzeichen besitzen. Der Mittelwert Δl_1 wird in diesem Falle dasselbe Vorzeichen haben und die beiden anderen Mittelwerte dem Zahlenwerte nach an Grösse übertreffen.

Wenn wir dieselbe Bezeichnungsweise, wie oben, beibehalten, aber bei der Zählung der Kreise von innen nach aussen fortschreiten, so liefert die Tabelle für F folgenden Ausdruck:

$$\Delta l_1 = \frac{1{,}0\,m_1 + 1{,}2\,m_2 + 1{,}2\,m_3 + 1{,}1\,m_4 + 0{,}9\,m_5 + 0{,}7\,m_6 + 0{,}5\,m_7 + 0{,}2\,m_8}{6{,}9}.$$

Man erkennt, dass nur m_8 durch seinen Zahlenkoeffizienten stark verkleinert wird, dass also nur diejenigen Δl, welche dicht an der Grenze von Z_1 liegen, den Wert von Δl_1 wenig beeinflussen. Grade m_1, m_2, m_3, m_4 und m_5, d. h. die um den Mittelpunkt P von Z_1 bis zu einem sphärischen Abstande von 20 Grad herumliegenden Δl_ψ, haben am meisten auf Δl_1 Einfluss, und da diese bei starker regionaler Abweichung von beträchtlicher Grösse sein und dasselbe Vorzeichen besitzen werden, so wird auch Δl_1 nicht viel kleiner ausfallen und eben dasselbe Vorzeichen haben.

Wir können unsere Überlegungen folgendermassen zusammenfassen:

Von den drei Mittelwerten Δl_1, Δl_2 und Δl_3, welche den Wert von N bestimmen, sind die zwei letzteren, mag N selbst gross oder klein sein, nie von besonderer Grösse. Bei stärkeren regionalen Abweichungen wird dagegen Δl_1 sie beide dem Zahlenwerte nach übertreffen, so dass in dem Ausdrucke

$$N = 3{,}6\,(\Delta l_1 - 1{,}7\,\Delta l_2 + 0{,}7\,\Delta l_3) = 3{,}6\,(\Delta l_1 - \Delta l')$$

durch $\Delta l'$ wohl der Zahlenwert, aber nicht das Vorzeichen von Δl_1 und N geändert werden kann.

In diesem Falle stimmt also das Vorzeichen von N mit dem von Δl_1 überein, und hieraus ergibt sich folgendes Resultat:

Falls für eine ausgedehntere Region der Erdoberfläche grössere Abweichungen der wirklichen Schwere von der normalen in demselben Sinne stattfinden sollten, so findet ebendaselbst eine Hebung des Geoids statt, wenn die Abweichungen positiv, eine Senkung dagegen, wenn dieselben negativ sind. Wenn nun trotz einer Erhebung (Senkung) des Geoids über (unter) das Sphäroid die wirkliche Schwerkraft g grösser (kleiner) als die normale γ ist, so erhält man die naheliegendste Erklärung hierfür durch die Annahme, dass in der betreffenden Gegend innerhalb der Erdkruste Massenanhäufungen (Massendefecte) vorhanden sind.

Es sind jetzt noch die vorhandenen Pendelbeobachtungen zu untersuchen, namentlich darauf hin, ob sie nicht irgendwie in Formel 5) verwertet werden können.

Die vollständigste Übersicht über die Länge des Secundenpendels ist von Helmert gegeben. In einer Tabelle, welche 122 Pendellängen enthält und sich im zweiten Bande, Cap. 2, § 29, seines genannten Werkes vorfindet, giebt er eine Zusammenstellung der bis zum Anfange des verflossenen Jahrzehnts vorhandenen Pendelbeobachtungen. In den Verhandlungen der Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung vom Jahre 1887 hat er in seinem „Bericht über die in den letzten Jahren ausgeführten Pendelmessungen“ eine weitere Übersicht von 62 Pendellängen geliefert, von denen aber viele schon in der ersten Zusammenstellung sich vorfinden.

In der ersten Tabelle finden sich die Abweichungen Δl in der Colonne mit der Überschrift „Verb.“, aber mit dem umgekehrten Vorzeichen, da hier $\Delta l = \lambda - l$ (nicht $= l - \lambda$) gesetzt ist.[13])

Von den 122 Pendellängen der ersten Tabelle zeigen 34 Abweichungen, die gleich oder grösser als 50 Mikrons sind, während unter den 62 neueren Bestimmungen nur 6 solcher Anomalien vorhanden sind. Bei mehreren dieser Abweichungen kann man direkt erkennen, dass sie nicht regionaler, sondern localer Natur sind, nämlich bei denjenigen, in deren Nähe andere Beobachtungen vorliegen. Z. B. betragen in Gudaur und Duchett im Kaukasus, die in Länge und Breite nicht einmal um einen Grad von einander entfernt sind, die Abweichungen $+ 50$ und $- 103$ (nach der neueren Tabelle $- 114$) Mikrons. Da hier selbst die Vorzeichen der Δl verschieden sind, so kann diese Verschiedenheit ihren Grund nur in localen Ursachen haben und müsste bei richtiger Reduction verschwinden. Ähnliche Unterschiede im Vorzeichen zeigen Gotha ($- 76$) und Inselsberg ($+ 71$), ferner Dehra ($- 145$) und Mussoorie ($+ 74$) in Indien. In dieser Weise lässt sich auf Grund der vorhandenen Beobachtungen mit vieler Wahrscheinlichkeit zeigen, dass auf dem Festlande wenigstens alle grösseren Abweichungen localer Natur sind, und dass regionale Abweichungen wohl kaum eine Grösse von 50 Mikrons erreichen werden.

Nicht so sicher ist diese Annahme für die sehr starken, und zwar stets positiven Abweichungen, welche sämtliche Beobachtungen auf kleinen, nicht zu nahe am Festlande liegenden

---

[13]) Wegen des nicht ganz genauen Reductionsfactors 0,002636, welcher zur Reduction der Pendellängen auf den 45. Breitegrad dient, können in der genannten Tabelle die einzelnen Δl bis zu $\pm$ 5 Mikrons ungenau sein was für die hier stattfindende Untersuchung ohne Belang ist.

Inseln zeigen. Ich führe hier die grössten, versehen mit der Nummer in der Helmertschen Tabelle, an:

Nr.	Beobachtungsort.	Δl in Mikrons.
2	Gaunsah Lout	+ 92
3	St. Thomas	+ 167
8	Ualan	+ 227
25a	Guam (nach Lütke)	+ 58
25b	„ (nach Freycinet)	+ 111
30	Jamaica	+ 64
44	Bonin-Insel	+ 232
58	Lipari	+ 134
113	Süd-Shetland I.	+ 63

Bezeichnet man die Beobachtungen auf dem Festlande mit F, die auf den Inseln mit I, so ist nach Helmert[14]) im Mittel:

$$I = F + 105.$$

Aber Helmert selbst begründet diesen Unterschied durch Fehler in den Reductionsrechnungen, so dass nach seiner Ansicht auch diese erheblichen Abweichungen Δl auf den Inseln zum grösseren Teile localer Natur sein dürften, und es sehr fraglich sei, ob auf dem offenen Meere (nicht auf Inseln) die nämlichen grossen Abweichungen stattfinden. Da aber brauchbare Beobachtungen auf dem Meere selbst noch nicht angestellt worden sind, so ist die Lösung dieser Frage der Zukunft vorbehalten.

Selbst auf dem Festlande sind die beobachteten Δl, welche also wegen der Ungenauigkeit der Reductionsmethoden noch Fehler in Folge localer Massenunregelmässigkeiten enthalten können, nicht in solcher Dichtigkeit vorhanden, um erkennen zu können, ob in den Abweichungen ein Vorzeichen besonders vorherrschend ist. Bildet man aus sämtlichen, in Europa vorhandenen Beobachtungen das arithmetische Mittel Δl_m, indem man ganz dicht beieinander liegende Beobachtungen zuvor zu einer einzigen vereinigt, so erhält man dafür:

$$\Delta l_m = + 7{,}5 \text{ Mikrons.}$$

In Europa ist demnach in den Abweichungen das positive Vorzeichen schwach vorherrschend, und in der That ist, wie im § 1 erwähnt, von Helmert eine geringe Erhebung des Geoids über das Sphäroid nachgewiesen worden.

Setzt man in Formel 5) gradezu $\Delta l_1 = + 7{,}5$ und vernachlässigt

$$\Delta l' = 1{,}7\,\Delta l_2 - 0{,}7\,\Delta l_3,$$

so erhält man:

$$N = 27^m,$$

während Helmert am Nordabhange der Alpen für N den Wert von 12^m (auf das Besselsche Ellipsoid bezogen) gefunden hat. Jedenfalls geht aus diesem Beispiele hervor, dass, wie früher

[14]) Helmert. a. a. O. II. Cap. 3. § 31.

durch allgemeine Betrachtungen nachgewiesen wurde, $\Delta l'$ keinen grossen Wert haben kann. Um für N den Wert von 12^m zu erhalten, müsste man, den Wert von $\Delta l_1 = 7{,}5$ als richtig angenommen, $\Delta l' = +4$ Mikrons setzen.

Die in Indien angestellten Pendelbeobachtungen geben dagegen als arithmetisches Mittel der einzelnen Abweichungen einen kleinen negativen Wert, sodass das Geoid daselbst trotz der gewaltigen Masse des Himalaya, wenn nicht grade eine Einsenkung, so doch auch nicht eine Erhebung über das Sphäroid besitzen würde. Die Annahme eines Massendefectes unter dem Himalaya würde also hierdurch bestätigt werden.

Eine Durchmusterung der vorhandenen Pendelbeobachtungen führt demnach mit Helmert zu folgendem Resultat:

Die bis jetzt gemessenen Einzelabweichungen lassen fast an keiner Stelle der Erdoberfläche ein stärkeres Vorherrschen eines der beiden Vorzeichen erkennen; sie machen im Gegenteil fast überall den Eindruck localer Anomalien. Was die Grösse der einzelnen Abweichungen anbelangt, so sind über 70% derselben kleiner als 50 Mikrons. Die vorhandenen grösseren Abweichungen sind mit grosser Wahrscheinlichkeit localer Natur und würden, wenn man die localen Ursachen richtig eliminieren könnte, sich auch bedeutend verringern. Von besonderer Grösse und stets positiv sind die Abweichungen auf kleinen Inseln; aber auch hier würde bei fehlerfreier Reduction die Grösse der Abweichungen sich vermindern, wenn auch ein Teil jeder Einzelabweichung regionaler Natur sein dürfte.

Zur Bekräftigung letzterer Behauptung wollen wir folgende Einzelabweichungen (ebenfalls mit der Nummer der Helmertschen Tabelle versehen) anführen:

Nr.	Beobachtungsort	Breite	Länge	Δl [15] in Mikrons
1	Rawak	0° N	128°E.	+ 23
8	Ualan	5° „	161° „	+ 222
25a	Guam	13°26′ „	142°26′ „	+ 54
25b	Guam	13°28′ „	142°38′ „	+ 107
36	Mauwi	21° „	159° „	+ 58
44	Bonin Insel	27° „	140° „	+ 228
96	Petropawlowsk	53° „	156° „	+ 42

Diese Beobachtungen sind in einem Kreise enthalten, der um einen Punkt P von 35 Grad nördlicher Breite und 165 Grad östlicher Länge mit ψ_1 als Radius geschlagen ist. In dieser Zone sind nur obige 6 Abweichungen bekannt, aber diese sind von ganz besonderer Grösse und sämtlich positiv. Wenn auch nach den obigen Bemerkungen durch fehlerfreie Reduction die Grösse der einzelnen Abweichungen sich vermindern würde, so wird doch bei der Grösse der hier vorliegenden Abweichungen ein Teil jeder einzelnen als regional bestehen bleiben. Demnach haben wir hier mit grosser Wahrscheinlichkeit den Fall, dass Δl_1 positiv

[15]) Die in dieser Tabelle enthaltenen Δl habe ich unter Benutzung des richtigen Reductionsfactors von neuem berechnet.

und von solcher Grösse ist, dass $\Delta l' = 1{,}7\Delta l_2 - 0{,}7\Delta l_3$ wohl den Zahlenwert, aber nicht das Vorzeichen von N ändern kann. Mithin ist N positiv und es findet demgemäss nördlich der Marshall-Inseln und östlich der Ladronen eine Hebung, sicher keine Senkung des Geoids, d. h. der Meeresfläche statt. Da nun trotzdem die wirklichen Pendellängen grösser als die normalen sind, so ist zur Erklärung hierfür die Annahme naheliegend, dass dort unter dem Ocean sich in der Erdkruste Massenanhäufungen vorfinden.

Hierdurch würde die Hypothese Fayes, dass unter den Meeren eine bedeutende Vergrösserung der Dichtigkeit der Erdkruste stattfindet, bestätigt werden.

Zum Schlusse wollen wir Formel 5) benutzen, um mit Hilfe des vorhandenen Beobachtungsmaterials einen Maximalwert von N zu finden, d. h. zu erkennen, wie hoch oder wie tief das Geoid bei einer regionalen Abweichung sich höchstens über das Sphäroid erheben oder unter dasselbe senken kann.

Die grösste Abweichung ist bis jetzt auf der Bonin-Insel gefunden worden, und zwar beträgt dieselbe + 228 Mikrons. Mithin ist der Mittelwert Δl_1, erst recht also Δl_2 und Δl_3, kleiner. Setzen wir demnach in Formel 5)

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \pm 228, \Delta l_2 = \mp 228 \text{ Mikrons},$$

so erhalten wir für N einen Wert, der in Wirklichkeit nie erreicht werden wird, nämlich

$$N = \pm 2790\text{m}.$$

Es ist wohl selbstverständlich, dass der wirkliche Maximalwert von N bedeutend kleiner ist. Es sind nämlich, wie erwähnt, mehr als 70% der vorhandenen Abweichungen kleiner als 50 Mikrons, während die Grösse der übrigen höchst wahrscheinlich von lokalen und nicht regionalen Massenverhältnissen herrührt. Daher können wir annehmen, dass auch der Mittelwert Δl_1 stets kleiner als 50 Mikrons ausfallen wird. Die Mittelwerte Δl_2 und Δl_3 sind, wie früher gezeigt, nie von besonderer Grösse. Wir werden sie auf alle Fälle zu gross annehmen, wenn wir sie halb so gross als Δl_1, also gleich 25 Mikrons setzen. Dann liefert Formel (5) folgenden Wert:

$$N = \pm 396 \text{ m},$$

und wir erhalten das Resultat:

Nach den bis jetzt vorhandenen Beobachtungen weicht das Geoid an keiner Stelle der Erdoberfläche von dem Sphäroid um den Betrag von 400 m ab.

Dieses Resultat ist wohl ganz sicher, aber in so fern negativ, als dadurch nur ausgesagt wird, dass nirgends auf der Erdoberfläche sich das Geoid vom Sphäroid um 400 m entfernt; der durchschnittlich vorhandene Maximalabstand ist dadurch noch nicht gegeben.

Wie oben begründet, beträgt das Maximum des Zahlenwerts der einzelnen Δl 50 Mikrons, woraus notwendig folgt, dass das Maximum des Mittelwerts Δl_1, der sich aus allen Δl der ersten Zone zusammensetzt, bedeutend kleiner sein muss. Man dürfte Δl_1 nicht zu klein setzen, wenn man für dasselbe etwa $^3/_4 . 50 = 38$ Mikrons annimmt. Ebenso wird man das Maximum der Mittelwerte Δl_2 und Δl_3 wohl gleich einem Drittel (nicht gleich der Hälfte) von Δl_1, also gleich 13 Mikrons setzen dürfen. Dann ergiebt sich:

$$N = \pm 248 \text{ m},$$

d. h. die vorhandenen Maximalabweichungen des Geoids vom Sphäroid erreichen mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit den Wert von 250 m.

§ 6.

Die gewonnenen Resultate mögen im Folgenden noch einmal zusammengefasst und einer kurzen Besprechung unterzogen werden.

Die Hoffnung Helmerts bezüglich der Anwendbarkeit der Formel von Stokes, „dass in nicht zu ferner Zeit eine solche möglich werden wird", hat sich nicht erfüllt. Selbst für „günstig gelegene Orte"[16]) ist in absehbarer Zeit an eine auch nur angenäherte Berechnung von N nicht zu denken, und zwar nicht allein wegen der fehlenden Beobachtungen auf dem offenen Meere[17]), sondern auch wegen der bis jetzt ziemlich unsystematisch angestellten Beobachtungsreihen auf den Kontinenten und Inseln, welche einigermassen dicht bei einander nur in Europa und Indien vorhanden sind.

Dass unsere Formel aber trotzdem von grosser Wichtigkeit für die Geodäsie und auch für die Geophysik sein dürfte, geht aus der veränderten Gestalt hervor, in welcher sie in § 5 unter Nr. 5 gegeben ist. In dieser Form nämlich wird man mit ihrer Hilfe nicht allein erkennen, wo grössere Abweichungen des Geoids und in welchem Sinne sie stattfinden, sondern sie lehrt uns auch, dass die wahrscheinlichen Ursachen dieser Abweichungen Massenanhäufungen resp. Massendefecte sind. Sie liefert uns mithin ein Mittel, mit Hilfe dessen man auf die in geologischer Hinsicht so ausserordentlich wichtige Verteilung regionaler Massenunregelmässigkeiten in der Erdkruste schliessen kann.

So zeigt sie jetzt schon, dass auf den Kontinenten, selbst dort, wo ihnen gewaltige Kettengebirge aufgelagert sind, z. B. in der Nähe des Himalaya und der Alpen keine oder nur äusserst geringe Erhebungen des Geoids stattfinden, und bestätigt dadurch nicht nur die schon früher von Pratt[18]) vermuteten Massendefekte unter hohen Gebirgen, sondern auch die Annahme Helmerts[18]), „dass die Wirkung der Kontinentalmassen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen." Unsere Formel zeigt ferner, dass eine umgekehrte Kompensation unter dem Meere stattfindet, d. h., dass die geringe Dichtigkeit der Oceane kompensiert wird durch eine dem entsprechend grössere Dichtigkeit der Erdkruste unter dem Meeresboden. Die Annahme Helmerts[18]), „dass von einer gewissen Tiefe an bis zur physischen Erdoberfläche vertikale Prismen von gleichem Querschnitt annähernd gleiche Massen enthalten, wo man die Prismen auch annehmen möge", wird demnach ebenfalls durch unsere Formel bestätigt.

Dass diese Kompensation keine vollständige sein wird, sondern nur als eine im grossen und ganzen stattfindende betrachtet werden muss, kann man aus den vorhandenen Beobachtungen insofern schliessen, als nach denselben die Maximalabweichungen des Geoids eine Grösse von 250 m erreichen können.

Diese Maximalabweichungen werden aber nur an vereinzelten Stellen der Erdoberfläche auftreten, alle übrigen Abweichungen werden von weit geringerem Betrage sein, so dass das eben ausgesprochene Kompensationsgesetz im grossen und ganzen mit Ausnahme weniger Stellen wohl für die gesamte Erdoberfläche Gültigkeit besitzt.

---

[16]) Man vergleiche Anmerkung 12 Seite 11.

[17]) Ueber die einzige Beobachtungsreihe auf dem Ocean selbst, welche Will. Siemens 1875 am Bathometer auf dem Schiffe Faraday anstellen liess, sehe man Helmert. a. a. O. II. Cap. 4, § 38 Seite 366.

[18]) Helmert. a. a. O. II. Cap. 4. § 38.

Man kann aus der geringen Grösse der Geoid-Abweichungen wohl weiter folgern, dass, wie im Erdinnern die Massen hinsichtlich ihrer Dichtigkeit auch verteilt sein mögen, grössere Abweichungen von einer gewissen ausgleichenden Anordnung nicht vorhanden sein werden, oder anders ausgedrückt, dass, falls solche Unregelmässigkeiten in der Massenanordnung existieren, dieselben so verteilt sind, dass sie sich in ihrer Wirkung nach aussen hin zum grössten Teile gegenseitig aufheben.

Indem wir mit Hilfe unserer Formel für die Maximalabweichungen des Geoids den geringen Betrag von 250 m erhalten, werden dadurch jetzt wohl endgültig die Ansichten von Erhebungen und Depressionen desselben bis zu dem Betrage von 1000 m, wie sie namentlich seit Ph. Fischer[19]) allgemein sich verbreitet haben, widerlegt sein. Indem durch solche Überschätzungen der Geoidabweichungen sich notwendigerweise der Wert der Gradmessungen zur Bestimmung der allgemeinen Gestalt und Grösse der Erde verringern musste, ist derselbe durch das erwähnte Kompensationsgesetz sowie durch die geringe Grösse der Maximalabweichungen, wie dies auch schon von Helmert[20]) gefolgert wurde, annähernd auf die alte Höhe gehoben worden.

Hier ist es an der Stelle, die neueste, vor kurzem erschienene Abhandlung Helmerts „Die Schwerkraft im Hochgebirge“ zu erwähnen, in welcher er, ohne die Formel von Stokes zu benutzen, die Resultate vorliegender Arbeit bestätigt[21]).

Er sagt Seite 3 unter Nr. 11: „Der Überschuss der Schwerkraft, der sich bei ihnen (den kleineren Inseln im Oceane) zeigt, kann nur darauf zurückgeführt werden, dass in der Erdrinde bei den Inseln vergleichsweise zu den kontinentalen Gegenden eine Massenanhäufung statt hat“; ferner unter Nr. 12: „Die Abstände des Geoids vom Erdellipsoid dürften ± 200 m nicht überschreiten, ein Betrag, der mehr als ausreichend ist, um den Widerspruch in den Ergebnissen der Gradmessung und Pendelmessungen für die Abplattung des Erdellipsoides zu erklären.“ Auf die vielen anderen, äusserst wichtigen Ergebnisse der Helmertschen Arbeit, deren Besprechung hier nicht am Platze ist, möge deshalb noch besonders hingewiesen werden.

Wie bereits erwähnt wurde, hatte schon früher Faye[22]), um die Pendelanomalien auf den kleinen Inseln im offenen Meere zu erklären, behauptet, aber ohne diese Behauptung durch die Rechnung zu bestätigen, dass unter den Oceanen eine bedeutende Verdickung der Erdkruste und eine Vergrösserung ihrer Dichtigkeit stattfinden müsse. Zu dieser Erklärung führten ihn die folgenden Erwägungen.

Man denke sich in einer Tiefe von $1^1/_2$ Meile eine Kugelfläche, so wird durch jede Flächeneinheit derselben in einer bestimmten Zeit in Folge der hohen Temperatur des Erdinnern eine bestimmte Wärmemenge von innen nach aussen hindurch gehen. Unter den Kontinenten befindet sich aber über der erwähnten Kugelfläche eine Schicht fester Erdkruste von geringer Wärmeleitungsfähigkeit, so dass hier die Abkühlung verhältnismässig langsam erfolgen wird. Anders ist dies unter den Oceanen. Dort ist die Schicht der die Wärme schlecht leiten-

[19]) Ph. Fischer. Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868.
[20]) Helmert. a. a. O. Cap. 4. § 38.
[21]) Helmert. Die Schwerkraft im Hochgebirge. Veröffentlichungen d. K. Pr. Geod. Inst. Berlin 1890.
[22]) Compt. Rend. CII, 651, 786.

den festen Erdrinde nur dünn, die Wärmemenge erreicht bald das stets sehr kalte Wasser auf dem Boden der Oceane, von wo sie durch die entstehenden Konvectionsströme schnell weitergeführt wird. Hier muss also die Abkühlung schneller erfolgen, als unter den Kontinenten und wird die oben erwähnte Vergrösserung der Dicke und Dichtigkeit der Erdkruste zur Folge haben. Die interessanten Schlussfolgerungen, welche Faye aus der verschieden schnell fortschreitenden Abkühlung unter dem Festlande und dem Meere zur Erklärung der Entstehung der Kontinente und Kettengebirge zieht, mögen, wenn auch ausserhalb des Rahmens unserer Arbeit liegend, doch noch kurz erwähnt werden.

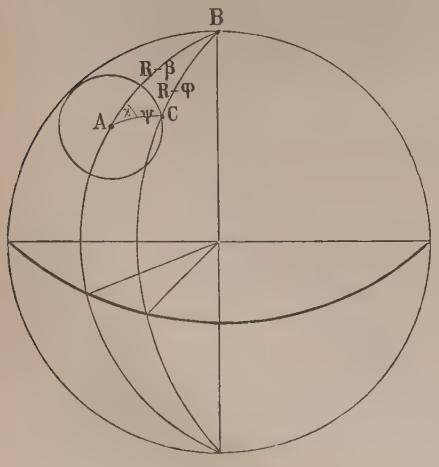
Dadurch, sagt Faye, dass die Dichtigkeit und Dicke der Erdrinde unter dem Meere verhältnismässig gross ist, muss ein um so grösserer Druck auf das Erdinnere ausgeübt werden, welcher sich im flüssigen Kerne nach allen Richtungen hin fortpflanzt. Durch diesen Druck werden dann die schwächern Teile der Erdkruste, die eine geringere Widerstandsfähigkeit besitzen, emporgehoben werden und auf diese Weise die Schollen der Kontinente entstehen. Das unter diesem Drucke stehende flüssige Magma wird ferner in die ersten, entstehenden Bruchlinien eindringen, in denselben in die Höhe steigen, und auf diese Weise, falls es die Erdoberfläche erreicht, zur Bildung der Centralmassive der grossen Kettengebirge Anlass geben.

Die Kettengebirge sind also nach ihm nicht allein durch horizontal wirkende Kräfte, durch Faltung, sondern auch, und zwar die centralen Teile derselben, durch vertikal nach oben wirkende Kräfte, durch Hebung, entstanden.

Zur weiteren Bekräftigung seiner Erklärung zieht schliesslich Faye noch den Mond heran, welcher keine grossen Meere besitzt und demgemäss auch nicht dem geschilderten Abkühlungsmodus unterworfen sein kann. Daher muss dessen Oberfläche, wie dies auch der Fall ist, eine ganz andere, äussere Struktur (z. B. keine Kettengebirge) besitzen, als sie die feste Erdkruste zeigt.

In wie weit diese Ansichten Fayes zutreffend sind oder nicht, mag dahin gestellt bleiben; hier ist nicht die Stelle, eine kritische Untersuchung darüber anzustellen.

§ 7.



Der mathematischen Vollständigkeit halber möge die Formel (22) des § 2

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \gamma \, F \, d\psi = 2\pi (\gamma - G), \tag{1}$$

mit deren Hilfe es uns gelang, einen klaren Einblick in die Formel von Stokes zu erhalten, jetzt noch auf direktem Wege berechnet werden.

In nebenanstehender Figur bedeute A den Punkt, für welchen N berechnet werden soll, B sei der Nordpol und C ein beliebiger Punkt, dessen Länge in Bezug auf A, gerechnet von dem Meridiane dieses Punktes aus, gleich χ und dessen Distanz von A gleich ψ sei. Die geographische Breite von A sei gleich β, die von C gleich φ.

Bezeichnen wir den Wert des Doppelintegrals in Formel (1) mit D, so wird mit Hilfe der Formel $\gamma = \gamma_a (1 + \mathfrak{b} \sin^2 \varphi)$:

$$D = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \gamma_a (1 + \mathfrak{b} \sin^2\varphi).\, F.\, d\psi = \mathfrak{b}\gamma_a \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, F\, d\psi, \tag{2}$$

da, wie im § 3 bewiesen worden ist, $\int_0^{\pi} F.\, d\psi = 0$ ist.

Im sphärischen Dreieck ABC ist:

$$\sin\varphi = \sin\beta \cos\psi + \cos\beta \sin\psi \cos\chi.$$
$$\sin^2\varphi = \sin^2\beta \cos^2\psi + \cos^2\beta \sin^2\psi \cos^2\chi + 2 \sin\beta \cos\beta \sin\psi \cos\psi \cos\chi.$$

Daher erhält man:

$$D = \mathfrak{b}\gamma_a \sin^2\beta \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \cos^2\psi\, F\, d\psi + \mathfrak{b}\gamma_a \cos^2\beta \int_0^{2\pi} \cos^2\chi\, d\chi \int_0^{\pi} \sin^2\psi\, F.\, d\psi$$
$$+ 2\,\mathfrak{b}\gamma_a \sin\beta\cos\beta \int_0^{2\pi} \cos\chi\, d\chi \int_0^{\pi} \sin\psi . \cos\psi .\, F.\, d\psi. \tag{3}$$

Wie in der Lehre von den bestimmten Integralen gezeigt wird, ist:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\chi\, d\chi = \pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos\chi\, d\chi = 0\,; \tag{4}$$

Mithin wird:

$$D = 2\pi\, \mathfrak{b}\gamma_a \sin^2\beta \int_0^{\pi} \cos^2\psi\, F\, d\psi + \pi\, \mathfrak{b}\gamma_a \cos^2\beta \int_0^{\pi} \sin^2\psi .\, F.\, d\psi.$$

Indem man $\cos^2\psi = 1 - \sin^2\psi$ setzt und abermals berücksichtigt, dass $\int_0^{\pi} F.\, d\psi = 0$ ist, bekommt man:

$$D = -2\pi\, \mathfrak{b}\gamma_a \sin^2\beta \int_0^{\pi} \sin^2\psi .\, F\, d\psi + \pi\, \mathfrak{b}\gamma_a \cos^2\beta \int_0^{\pi} \sin^2\psi .\, F.\, d\psi. \tag{5}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\int_0^{\pi} \sin^2\psi .\, F.\, d\psi = Z, \tag{6}$$

so wird:

$$D = \pi Z\, (\mathfrak{b}\gamma_a \cos^2\beta - 2\,\mathfrak{b}\gamma_a \sin^2\beta) = \pi Z\, (\mathfrak{b}\gamma_a - 3\,\mathfrak{b}\gamma_a \sin^2\beta). \tag{7}$$

Bezeichnet man die Normalschwere in A mit γ_A, so ist:

$\gamma_A = \gamma_a (1 + \mathfrak{b} \sin^2\beta)$, also $\mathfrak{b}\gamma_a \sin^2\beta = \gamma_A - \gamma_a$, demnach:

$$D = \pi Z\, (\mathfrak{b}\gamma_a - 3\gamma_A + 3\gamma_a) = \pi Z \left(3\gamma_a \left[1 + \frac{\mathfrak{b}}{3}\right] - 3\gamma_A\right).$$

Da nach (5) des § 2. $\gamma_a \left(1 + \frac{\mathfrak{b}}{3}\right) = G$ ist, bekommt man schliesslich:

$$D = -3\pi Z\, (\gamma_A - G). \tag{8}$$

Zur Berechnung des Integrals Z muss man den Ausdruck für F, wie ihn Formel (21) des § 2. enthält, benutzen. Dadurch erhält man:

$$\left.\begin{aligned} Z = \int_0^{\pi} \sin^2\psi . F . d\psi = \int_0^{\pi} \sin^2\psi . \cos\frac{\psi}{2} . d\psi - 3\int_0^{\pi} \sin^3\psi . \sin\frac{\psi}{2}\, d\psi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^3\psi . d\psi \\ - \frac{5}{2}\int_0^{\pi} \sin^3\psi . \cos\psi . d\psi - \frac{3}{2}\int_0^{\pi} \sin^3\psi . \cos\psi . \text{lognat}\left[\frac{1-\cos\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right] . d\psi . \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Das Integral Z zerfällt mithin in 5 Teile, die man mit Hilfe unbestimmter Integration einzeln berechnen kann.

1) $$\int \sin^2\psi \cos\frac{\psi}{2} . d\psi = 4\int \sin^2\frac{\psi}{2} . \cos^2\frac{\psi}{2} \cos\frac{\psi}{2} . d\psi = 8\int \sin^2\frac{\psi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\psi}{2}\right) d\sin\frac{\psi}{2}$$

$$= 8\int x^2 (1 - x^2)\, dx; \qquad \left(x = \sin\frac{\psi}{2}\right);$$

$$= 8\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right).$$

Demnach: $$\int_0^{\pi} \sin^2\psi \cos\frac{\psi}{2} . d\psi = 8\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{16}{15}.$$

2) $$\int \sin^3\psi . \sin\frac{\psi}{2}\, d\psi = 16\int \sin^4\frac{\psi}{2} . \cos^3\frac{\psi}{2} . d\frac{\psi}{2} = 16\int \sin^4\frac{\psi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\psi}{2}\right) d\sin\frac{\psi}{2}$$

$$= 16\int x^4 (1-x^2)\, dx = 16\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right). \qquad \left(x = \sin\frac{\psi}{2}\right)$$

Also: $$\int_0^{\pi} \sin^3\psi \sin\frac{\psi}{2}\, d\psi = 16\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)_0^1 = \frac{32}{35}.$$

3) $$\int \sin^3\psi . d\psi = -\int \sin^2\psi . d\cos\psi = \int (\cos^2\psi - 1)\, d\cos\psi = \int (x^2-1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x . \quad (x = \cos\psi);$$

Mithin: $$\int_0^{\pi} \sin^3\psi\, d\psi = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)_1^{-1} = \frac{4}{3}.$$

4) $$\int \sin^3\psi . \cos\psi . d\psi = \int \sin^3\psi . d\sin\psi = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}. \qquad (x = \sin\psi);$$

Daher: $$\int_0^{\pi} \sin^3\psi \cos\psi\, d\psi = \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^0 = 0.$$

5) $$\int \sin^3\psi . \cos\psi . \log\text{nat}\left[\frac{1-\cos\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right] . d\psi$$

$$= 8\int \sin^3\frac{\psi}{2}\cdot\cos^3\frac{\psi}{2}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\cdot\log\text{nat}\left[\sin\frac{\psi}{2}\left(1+\sin\frac{\psi}{2}\right)\right]\cdot d\psi$$

$$= 16\int \sin^3\frac{\psi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\log\text{nat}\left[\sin\frac{\psi}{2}\left(1+\sin\frac{\psi}{2}\right)\right]\cdot d\sin\frac{\psi}{2}$$

$$= 16\int x^3(1-x^2)(1-2x^2)\log\text{nat}\,[x(1+x)]\,dx, \qquad \left(x=\sin\frac{\psi}{2}\right),$$

$$= 16\int \log\text{nat}\,[x(1+x)].[x^3-3x^5+2x^7]\,dx$$

$$= 16\int \log\text{nat}\,[x(1+x)].d\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{4}\right],$$

oder mit Anwendung teilweiser Integration:

$$= 16\left\{\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{4}\right]\log\text{nat}\,[x(1+x)]-\int\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{4}\right].\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}\right].dx\right\}.$$

Man setze letzteres Integral = U, so wird:

$$U = \frac{1}{4}\int x^3\,dx-\frac{1}{2}\int x^5\,dx+\frac{1}{4}\int x^7\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{x^4-2x^6+x^8}{1+x}\cdot dx,$$

$$= \frac{x^4}{16}-\frac{x^6}{12}+\frac{x^8}{32}+\frac{1}{4}\int x^4.dx-\frac{1}{4}\int x^5.dx-\frac{1}{4}\int x^6.dx+\frac{1}{4}\int x^7.dx,$$

$$= \frac{x^4}{16}-\frac{x^6}{12}+\frac{x^8}{32}+\frac{x^5}{20}-\frac{x^6}{24}-\frac{x^7}{28}+\frac{x^8}{32}.$$

Man erhält schliesslich:

$$\int_0^{\pi}\sin^3\psi.\cos\psi.\log\text{nat}\left[\frac{1-\cos\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right].d\psi$$

$$=16\left\{\left[\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{4}\right)\log\text{nat}\,(x^2+x)\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^6}{12}+\frac{x^8}{32}+\frac{x^5}{20}-\frac{x^6}{24}-\frac{x^7}{28}+\frac{x^8}{32}\right]_0^1\right\}=-\frac{8}{35}.$$

Mit Hilfe dieser 5 Integrale bekommt man:

$$Z = \int_0^{\pi}\sin^2\psi.F.d\psi = \frac{16}{15}-3.\frac{32}{35}+\frac{1}{2}.\frac{4}{3}+\frac{3}{2}.\frac{8}{35} = -\frac{2}{3}. \qquad (10)$$

Setzt man diesen Wert von Z in Formel (8) ein, so ergiebt sich:

$$D = 2\pi\,(\gamma_A - G), \tag{11}$$

oder indem man den Index A weglässt, die Formel (1):

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} \gamma . F . d\psi = 2\pi(\gamma - G).$$

Um die Genauigkeit des Verfahrens zur Berechnung von N zu prüfen, wurde im § 4 ein Zahlenbeispiel durchgerechnet, welches sich auf den Nord- resp. Südpol der Erde bezog. Da in diesem Falle kein Fehler bei der Bildung der $l\psi$ begangen werden konnte, so bleibt noch zu untersuchen, in wie weit die Genauigkeit obigen Rechnungsverfahrens durch eine ungenaue Bildung der einzelnen $l\psi$ etwa noch verringert werden könnte. Deshalb habe ich noch einmal ein anderes Zahlenbeispiel ausgeführt, das sich auf einen Punkt A mit der geographischen Breite von 45 Grad bezieht. Dabei wurden die $\lambda\,\psi$ einmal nach einer strengen Formel, dann annäherungsweise berechnet. Da diese Berechnung nach einfachen Formeln geschieht, die mathematisch von keinem Interesse sind, so ist es unnötig, auf dieselbe hier näher einzugehen. Als Ergebnis fand sich, dass, um weitere Ungenauigkeiten in dem im § 4 geschilderten Rechnungsverfahren zu vermeiden, es genügt, die einzelnen λ auf jedem Kreise ψ in Abständen von 5 Grad aufeinander folgen zu lassen; es bleibt daher das Resultat, wie es am Ende des § 4 ausgesprochen ist, erhalten.